

Exercice 19

(9)

① $e^{2x+1} = e^{6/x}$ et définie si $x \neq 0$.

$$e^{2x+1} = e^{6/x} \Leftrightarrow 2x+1 = \frac{6}{x} \Leftrightarrow 2xe^2 + x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } \frac{3}{2}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ -2; \frac{3}{2} \right\}$

② $e^{2x-1} > e^{-x^2+3} \Leftrightarrow 2x-1 > -x^2+3 \Leftrightarrow x^2+2x-4 > 0$

$$\Leftrightarrow x < -1-\sqrt{5} \text{ ou } x > -1+\sqrt{5}$$

Donc $\mathcal{S} =]-\infty; -1-\sqrt{5}[\cup]1+\sqrt{5}; +\infty[$

③ $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t - 3 = 0$ en posant $t = e^x$

$$\Leftrightarrow t = -1 \text{ ou } 3$$
$$\Leftrightarrow e^x = -1 \text{ ou } e^x = 3$$
$$\Leftrightarrow x = \ln 3$$

Donc $\mathcal{S} = \{ \ln 3 \}$

④ $|x^2+2x-3| < 6 \Leftrightarrow x^2+2x-3 < 6$ et $x^2+2x-3 > -6$

$$\Leftrightarrow x^2+2x-9 < 0 \text{ et } x^2+2x+3 > 0$$
$$\Leftrightarrow x \in]-1-\sqrt{10}; -1+\sqrt{10}[\text{ et } x \in \mathbb{R}$$

Donc $\mathcal{S} =]-1-\sqrt{10}; -1+\sqrt{10}[$

⑤ $x=0$ n'est pas solution donc on peut supposer $x \neq 0$.
Alors $|x| > 0$ donc :

$$|x^2 + 2x| < 3|x| \iff \frac{|x^2 + 2x|}{|x|} < 3 \iff |x+2| < 3$$

$$\iff x+2 < 3 \text{ et } -3 < x+2$$

$$\iff x < 1 \text{ et } -5 < x$$

Donc $\boxed{y =]-5, 0[\cup]0, 1[}$

⑥ $\ln(\ln x) = \ln(x^2 - 1)$ est définie si $2x > 0$ et $x^2 - 1 > 0$
si $x > 1$

Pour $x > 1$:

$$\ln(2x) = \ln(x^2 - 1) \iff 2x = x^2 - 1$$

$$\iff x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\iff x = 1 - \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 + \sqrt{2}$$

$$\iff x = 1 + \sqrt{2} \text{ car } x > 1$$

Donc $\boxed{y = \{1 + \sqrt{2}\}}$

⑦ $\ln(\ln x) \geq \ln(x^2 - 1)$ est définie si $x > 1$.

Pour $x > 1$:

$$\ln(\ln x) \geq \ln(x^2 - 1) \iff \ln x \geq x^2 - 1 \text{ car } \ln \text{ stricte } \nearrow$$

$$\iff x^2 - \ln x - 1 \leq 0$$

$$\iff 1 - \sqrt{2} < x \leq 1 + \sqrt{2}$$

$$\iff 1 < x \leq 1 + \sqrt{2} \text{ car } x > 1$$

donc $\boxed{y =]1, 1 + \sqrt{2}]}$

⑧ $\sqrt{x+1} < 5-x$ est définiessi $x \geq -1$.

cas 1 $-1 < x < 5$. Alors $5-x \geq 0$.

Donc: $\sqrt{x+1} \leq 5-x \iff x+1 \leq (5-x)^2$ car les 2 membres sont ≥ 0

$$\iff x^2 - 11x + 24 \geq 0$$

$$\iff x \leq 3 \text{ ou } x \geq 8$$

$$\iff -1 < x \leq 3 \text{ car } x \in [-1, 5]$$

cas 2 $x > 5$. Alors $5-x < 0$ et $\sqrt{x+1} \geq 0$

Donc $\sqrt{x+1} < 5-x$ est impossible

Conclusion: $\boxed{y = [-1, 3]}$

⑨ $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ est définie sur \mathbb{R} car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2+1 \geq 0$

De plus $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$

donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$. Donc $\boxed{y = \mathbb{R}}$

⑩ $5^x - 5^{x+1} + 2^{3x-1} = 0 \iff 2^{3x-1} = 5^{x+1} - 5^x$

$$\iff 2^{3x-1} = 5^x (5-1)$$

$$\iff 2^{3x-1} = 4 \times 5^x$$

$$\iff 2^{3x-3} = 5^x$$

$$\iff (3x-3) \cdot \ln 2 = x \cdot \ln 5$$

$$\iff x \cdot (3 \ln 2 - \ln 5) = 3 \cdot \ln 2$$

$$\iff x = \frac{\ln 8}{\ln(\frac{8}{5})}$$

Donc $\boxed{y = \left\{ \frac{\ln 8}{\ln(\frac{8}{5})} \right\}}$

11) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} = 3$ est définie ssi $x \geq -2$. (12)

La fonction $x \mapsto \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3} + \sqrt{x+6} - 3$ est strictement croissante sur $[-2, +\infty[$ et continue.

$$f(-2) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

D'après le théorème de la bijection monotone, f est bijective de $[-2, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

Donc $\exists ! x \geq -2, f(x) = 0$. Et on a vu que $f(-2) = 0$

$$\text{Donc } \boxed{\mathcal{S} = \{-2\}}$$

12) De même $x \mapsto \sqrt{x+1} + \sqrt{x+10} + \sqrt{x+100} - 12$ est strictement croissante sur $[-1, +\infty[$.

$$\text{Or } f(-1) = 3 + \sqrt{99} - 12 > 3 + \sqrt{81} - 12 = 0$$

Donc $\forall x \geq -1, f(x) > 0$. Donc $\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$

13) $2 \ln(x+1) + \ln(3x+5) + \ln 2 = \ln(6x+1) + \ln(x-2) + \ln(x+2)$ (E)
est définie ssi $x > 2$.

Pour $x > 2$:

$$(E) \Leftrightarrow \ln((x+1)^2(3x+5)2) = \ln((6x+1)(x-2)(x+2))$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)^2(3x+5) = (6x+1)(x^2-4)$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 + 22x^2 + 26x + 10 = 6x^3 + x^2 - 24x - 4$$

$$\Leftrightarrow 21x^2 + 50x + 14 = 0 \quad \text{Impossible si } x > 0 \text{ donc si } x > 2.$$

$$\boxed{\mathcal{S} = \emptyset}$$

14) $e^x + e^{1-x} = e + 1$

$\Leftrightarrow t + \frac{e}{t} = e + 1$ avec $t = e^x > 0$

$\Leftrightarrow t^2 - (e+1)t + e = 0$

$\Leftrightarrow t = 1$ ou $e \Leftrightarrow x = 0$ ou 1

Donc $S = \{0, 1\}$

15) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ est définiessi $x > 0$.

pour $x > 0$:

$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x \Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln x = x \cdot \ln \sqrt{x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \cdot \ln x = \frac{x}{2} \cdot \ln x$

$\Leftrightarrow \ln x = 0$ ou $\sqrt{x} = \frac{x}{2}$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $\sqrt{x} = 2$

$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = 4$

Donc $S = \{1, 4\}$

16) $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x-\frac{1}{2}} + 3^{x+\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow (2+1) \cdot 2^{2x-1} = (3+1) \cdot 3^{x-\frac{1}{2}}$

$\Leftrightarrow 2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow (2x-3) \ln 2 = (x-\frac{3}{2}) \ln 3$

$\Leftrightarrow (2 \ln 2 - \ln 3) \cdot x = 3 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3$

$\Leftrightarrow x = \frac{3 \ln \frac{4}{3}}{2 \ln \frac{4}{3}} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Donc $S = \{\frac{3}{2}\}$