Correction du DM5

Exercice 8

① Pour $x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$ et $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$

donc $\boxed{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^{x}}$ et $\boxed{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}}$

et donc $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = (\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x) \times (\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x)$

$= e^{-x} \times e^{x}$

ie $\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$

② Pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\operatorname{ch}(x).\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x).\operatorname{ch}(y) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \times \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} + \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \times \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{x+y} - \cancel{e^{x-y}} + \cancel{e^{y-x}} - e^{-x-y} + e^{x+y} + \cancel{e^{x-y}} - \cancel{e^{y-x}} - e^{-x-y}\right)$$

$$= \frac{2}{4}\left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right)$$

donc $\boxed{\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{ch}(x).\operatorname{sh}(y) + \operatorname{sh}(x).\operatorname{ch}(y)}$ (1)

et en remplaçant y par $-y$:

$\boxed{\operatorname{sh}(x-y) = \operatorname{sh}(x).\operatorname{ch}(y) - \operatorname{ch}(x).\operatorname{sh}(y)}$ (2)

De même on trouve :

$$\boxed{ch(x+y) = ch(x).ch(y) + sh(x).sh(y)} \quad (3)$$

et $\boxed{ch(x-y) = ch(x).ch(y) - sh(x).sh(y)} \quad (4)$

③ (3)+(4) donne $\boxed{ch(x).ch(y) = \frac{1}{2}\left(ch(x+y) + ch(x-y)\right)}$

(3)−(4) donne $\boxed{sh(x).sh(y) = \frac{1}{2}\left(ch(x+y) - ch(x-y)\right)}$

(1)+(2) donne $\boxed{sh(x).ch(y) = \frac{1}{2}\left(sh(x+y) + sh(x-y)\right)}$

Si on pose $\begin{cases} s = x+y \\ t = x-y \end{cases}$ ie $\begin{cases} x = \frac{s+t}{2} \\ y = \frac{s-t}{2} \end{cases}$

on a $\boxed{ch(s) + ch(t) = 2ch\left(\frac{s+t}{2}\right).ch\left(\frac{s-t}{2}\right)}$

$$\boxed{ch(s) - ch(t) = 2sh\left(\frac{s+t}{2}\right).sh\left(\frac{s-t}{2}\right)}$$

$$\boxed{sh(s) + sh(t) = 2sh\left(\frac{s+t}{2}\right).ch\left(\frac{s-t}{2}\right)}$$

et en remplaçant t par $-t$:

$$\boxed{sh(s) - sh(t) = 2ch\left(\frac{s+t}{2}\right).sh\left(\frac{s-t}{2}\right)}$$