Exercice 9

1. sh est <u>continue</u> et <u>strictement croissante</u> sur $\mathbb{R}$.

De plus $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$.

D'après le théorème de la bijection monotone,

$\boxed{\text{sh est bijective de } \mathbb{R} \text{ vers } \mathbb{R}}$

Elle admet donc une fonction réciproque $\operatorname{sh}^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{sh} x = y \iff e^x - e^{-x} = 2y$$

$$\iff z^2 - 2yz - 1 = 0 \quad \text{en posant } z = e^x$$

Pour l'équation $z^2 - 2yz + 1 = 0$ on a $\Delta = 4y^2 + 4 > 0$

donc $z = y \pm \sqrt{y^2+1}$

Mais $\sqrt{y^2+1} > |y| \geq y$ et $z > 0$ car $z = e^x$

Donc : $\operatorname{sh} x = y \iff z = y + \sqrt{y^2+1}$

$$\iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$$

car $\sqrt{y^2+1} > |y| \geq -y$

donc $y + \sqrt{y^2+1} > 0$

Comme on a trouvé une unique solution, on peut en déduire que sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ (on le savait déjà).

De plus : $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad sh^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}$

Cette fonction est notée argsh.

2) De même ch induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$.

ie $ch_{|\mathbb{R}^+}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$.

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in [1, +\infty[$. On a :

$$ch\, x = y \iff z^2 - 2yz + 1 = 0 \quad \text{avec } z = e^x$$

Cette fois : $\Delta = 4(y^2 - 1) \geq 0$

$$\text{donc} \quad z = y \pm \sqrt{y^2 - 1} \qquad (\text{valable même si } \Delta = 0)$$

$$\text{mais} \quad y - \sqrt{y^2-1} = \frac{y^2 - (y^2-1)}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{y + \sqrt{y^2-1}} \leq \frac{1}{y} \underset{y \geq 1}{\leq} 1$$

et $z = e^x \geq 1$ puisque $x \geq 0$.

$$\text{Donc : } ch\, x = y \iff e^x = y + \sqrt{y^2-1}$$

$$\iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

car $y + \sqrt{y^2-1} > 0$

puisque $y = |y| > \sqrt{y^2-1}$

On retrouve que ch induit une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[1, +\infty[$.

De plus $\boxed{\forall y \geqslant 1, \quad \left(ch_{|\mathbb{R}^+}\right)^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}$

Cette fonction est notée argch.

③ On pose $th\, x = \dfrac{sh\, x}{ch\, x}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $ch\, x \geqslant 1$ donc $ch\, x \neq 0$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad th' x = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x} > 0$$

Donc th est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus $th\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{\cancel{e^x}}{\cancel{e^x}} \times \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \dfrac{1}{1} = 1$

et de même $th\, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$

D'après le théorème de la bijection monotone,

$\boxed{\text{th est bijective de } \mathbb{R} \text{ vers }]-1, 1[}$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1, 1[$.

$$th\, x = y \iff \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = y \iff e^{2x}(1-y) = y + 1$$

$$\text{th}\, x = y \underset{y \neq 1}{\iff} e^{2x} = \frac{y+1}{1-y} \iff 2x = \ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right)$$

car $\frac{y+1}{1-y} > 0$ car $-1 < y < 1$

$$\iff x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

On retrouve que th est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$.

De plus : $\boxed{\forall y \in]-1, 1[, \quad \text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)}$

Cette fonction est notée argth.