TD6 Ex 9

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_{2n} - S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Cette somme comporte n termes et le plus petit est $\frac{1}{2n}$.

Donc $S_{2n} - S_n \geqslant n \times \frac{1}{2n}$ ie $\boxed{S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}}$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \frac{1}{n+1} \geqslant 0$ donc $\boxed{(S_n)_{n \geqslant 1} \text{ est croissante}}$.

3. Par l'absurde supposons que (S_n) converge vers un réel l.

D'après le théorème des suites extraites $S_{2n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Par somme de limites : $S_{2n} - S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l - l = 0$

Mais l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$

donne par prolongement des inégalités : $0 \geqslant \frac{1}{2}$. Absurde.

Donc (S_n) n'est pas convergente.

Comme elle est croissante, le théorème de la limite monotone nous apprend que $\boxed{S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.}$