Suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{Z}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente et telle que
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{Z}$.
Mq $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire apcr.

On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On a $\ell\in\mathbb{R}$.

Montrons que $\ell\in\mathbb{Z}$. Par l'absurde supposons que $\ell\notin\mathbb{Z}$.

On a donc $\lfloor \ell\rfloor < \ell < \lfloor \ell\rfloor + 1$.

Par somme de limites finies : $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \lfloor \ell\rfloor) = \ell - \lfloor \ell\rfloor > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - \lfloor \ell\rfloor - 1) = \ell - \lfloor \ell\rfloor - 1 < 0$

Donc apcr : $u_n - \lfloor \ell\rfloor > 0$ et $u_n - \lfloor \ell\rfloor - 1 < 0$

ie $\lfloor \ell\rfloor < u_n < \lfloor \ell\rfloor + 1$

Ceci est absurde car $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\mathbb{Z}$.

Donc on vient de montrer que $\boxed{\ell\in\mathbb{Z}}$.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ signifie :

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \forall n\geq n_0,\ |u_n - \ell|\leq\varepsilon$$

En particulier pour $\varepsilon = 1/2$: $\ell - \frac{1}{2} \leq u_n \leq \ell + \frac{1}{2}$ apcr

Comme ℓ et u_n sont des entiers : $u_n = \ell$ apcr

Donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est stationnaire apcr.}}$