Théorème de Cesaro

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle ou complexe, convergente vers ℓ.

On pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ c_n = \dfrac{u_1+u_2+\dots+u_n}{n}$

Alors la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge elle aussi vers ℓ.

Soit $\varepsilon>0$.

On cherche $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n\geq n_0(\varepsilon),\ |c_n-\ell|\leq\varepsilon$

On remarque que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell=\dfrac{1}{n}.n\ell=\ell$

donc $c_n-\ell=\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k\right)-\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell\right)=\dfrac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)$

et donc par inégalité triangulaire :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |c_n-\ell|=\frac{1}{n}.\left|\sum_{k=1}^{n}(u_k-\ell)\right|\leq\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}|u_k-\ell| \quad (*)$$

On a supposé que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$. Donc il existe $n_1(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$

tel que $\forall n\geq n_1(\varepsilon),\ |u_n-\ell|\leq\dfrac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall n\geq n_1(\varepsilon),\ \displaystyle\sum_{k=n_1(\varepsilon)}^{n}|u_k-\ell|\leq(n-n_1(\varepsilon)+1)\times\frac{\varepsilon}{2}$

$$\leq n.\frac{\varepsilon}{2} \text{ car } n_1(\varepsilon)\geq 1$$

$(**)$

Et comme $n_1(\varepsilon)$ est constant par rapport à n :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n_1(\varepsilon)-1} |u_k - \ell| = 0$$

donc il existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall n \geq n_2(\varepsilon),\quad \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n_1(\varepsilon)-1} |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (***)$$

$(*)$ peut s'écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |c_n - \ell| \leq \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n_1(\varepsilon)-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n}\sum_{k=n_1(\varepsilon)}^{n} |u_k - \ell|$$

Si on pose $n_0(\varepsilon) = \max(n_1(\varepsilon); n_2(\varepsilon))$ et si on utilise $(**)$ et $(***)$ on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad |c_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \ell$. <u>CQFD.</u>

<u>Rem :</u> La réciproque est fausse.
Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n$ alors $(c_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'a pas de limite.