

Ex 12

①

$$\textcircled{1} A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}$$

échelonnée donc $\text{rg} A = 3$. A est inversible.

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 4L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_3 \end{array}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = I_3 \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{4}L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{array}$$

échelonnée réduite

$$\textcircled{2} B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

échelonnée réduite.

$$\text{rg}(B) = 1$$

$$\textcircled{3} C = \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & -22 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \end{array}$$

$$C \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_3$$

échelonnée. $\text{rg}(C) = 3 < 4$ donc C n'est pas inversible.

$$C \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow \frac{1}{4} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{22} L_3 \end{array}$$

$$C \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 7L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3 \end{array}$$

$$C \sim \begin{pmatrix} \boxed{3} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

$$C \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée réduite

4

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array}$$

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

échelonnée. $\text{rg}(D) = 3$

⚠ D n'est pas une matrice carrée et se demander si elle est inversible n'a pas de sens.

$$D \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} L_1 \leftarrow L_1 + L_2$$

$$D \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow 2L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \end{array}$$

$$D \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

échelonnée réduite.