

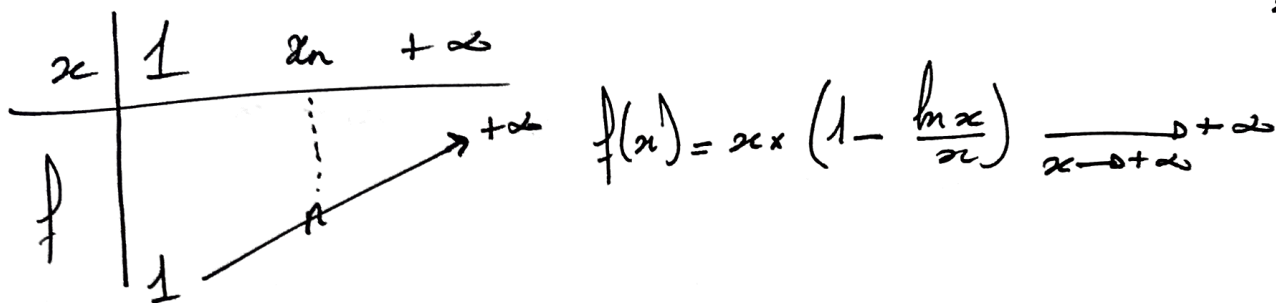
TD6 Ex 27

(1)

(E_n): $x - \ln x + n = 0$

1. On étudie la fonction $f: x \mapsto x - \ln x$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Elle est dérivable sur $[1, +\infty[$ et: $\forall x \geq 1, f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$ si $x \neq 1$



f est strictement croissante et continue sur $[1, +\infty[$

donc bijective de $[1, +\infty[$ vers $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $n \in f([1, +\infty[)$: $\exists ! x_n \geq 1, f(x_n) = n$.

|| Donc l'équation (E_n) a une unique solution dans $[1, +\infty[$ notée x_n .

2. On a $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$.

Comme f est strictement croissante: $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

|| Donc $(x_n)_{n \geq 1}$ est croissante.

De plus $x_n = \ln(x_n) + n \geq n$ car $\ln(x_n) \geq 0$ car $x_n \geq 1$

Comme $n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ on a par minoration $\| x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$

3. idée comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

on aurait $n = x_n - \ln(x_n) \sim x_n$.

preuve: Comme $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\frac{\ln t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

on a $\frac{\ln x_n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $\frac{x_n - n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ car $\ln x_n = x_n - n$

ie $1 - \frac{n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

donc $\frac{n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

ie $n \sim x_n$ et par symétrie

$$\frac{x_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$