TD6 Ex 27

$(E_n) : x - \ln x + n = 0$

1. On étudie la fonction $f : x \longmapsto x - \ln x$ sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

Elle est dérivable sur $[1, +\infty[$ et : $\forall x \geqslant 1$, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$
$= \dfrac{x-1}{x} > 0$ si $x \neq 1$

| $x$ | $1$ | $x_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $1$ | $n$ ↗ | $+\infty$ |

$f(x) = x \times \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$f$ est strictement croissante et continue sur $[1, +\infty[$ donc bijective de $[1, +\infty[$ vers $f([1, +\infty[) = [1, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $n \in f([1, +\infty[) : \exists !\, x_n \geqslant 1, \ f(x_n) = n$.

Donc l'équation $(E_n)$ a une unique solution dans $[1, +\infty[$ notée $x_n$.

2. On a $f(x_{n+1}) = n+1 > n = f(x_n)$.

Comme $f$ est strictement croissante : $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Donc $(x_n)_{n \geqslant 1}$ est croissante.

De plus $x_n = \ln(x_n) + n \geqslant n$ car $\ln(x_n) \geqslant 0$ car $x_n \geqslant 1$

Comme $n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ on a par minoration $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

3. <u>idée</u> comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

on aurait $n = x_n - \ln(x_n) \sim x_n$.

<u>preuve:</u> Comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ et $\frac{\ln t}{t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

on a $\frac{\ln x_n}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\frac{x_n - n}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $\ln x_n = x_n - n$

ie $1 - \frac{n}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $\frac{n}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

ie $n \underset{n \to +\infty}{\sim} x_n$ et par symétrie $\boxed{x_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$