TD6 Ex 22

1. $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \times \dots \times \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

Pour tout $k \in [\![2,n]\!]$: $0 < \frac{\pi}{} \leqslant \frac{\pi}{2^k} \leqslant \frac{\pi}{} \leqslant \frac{\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right) > 0$

Par produit : $\forall n \geqslant 2,\ u_n > 0$.

Et : $\forall n \geqslant 2,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \leqslant 1$ donc $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Ainsi $\boxed{(u_n)_{n\geqslant 2} \text{ est décroissante}}$ minorée par 0 donc $\boxed{\text{convergente}}$ vers un réel $l \geqslant 0$

2. Pour $n \geqslant 2$:

$$v_{n+1} = u_{n+1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = u_n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$$

or $\sin(2a) = 2\cos a \cdot \sin a$

donc $v_{n+1} = \frac{1}{2} u_n \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{2^{n+1}}\right) = \frac{1}{2} u_n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{1}{2} v_n$.

Donc $\boxed{(v_n)_{n\geqslant 2} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$.

3. On a donc $\forall n \geqslant 2,\ v_n = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot v_2 = \frac{1}{2^{n-2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2^{n-1}}$

Donc $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = \frac{1}{2^{n-1} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}}$

On a $\frac{\pi}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$$\text{Donc } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2^n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc $\frac{2}{\pi} \times \frac{1}{u_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$

donc $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{2}{\pi}}$