Exercice 1 du TD8

1.(a) $\dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x} = \dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \times \dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{\ln x}{x}}$ et d'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

donc par opérations sur les limites :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{\ln(x)+x} = \boxed{1}$$

1.(b) On sait que $\lim\limits_{t \to 0^+} t.\ln t = 0$ par croissances comparées.

Et $\lim\limits_{x \to 1^+} \ln x = 0^+$ donc par composition de limites :

$$\lim_{x \to 1^+} \ln(x).\ln(\ln x) = \boxed{0}$$

1.(d) D'après les croissances comparées $\lim\limits_{t \to +\infty} t^4.e^{-t} = 0$.

Et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ donc par composition de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} x^2.e^{-\sqrt{x}} = \boxed{0}$$

1.(c) $\ln(\sin x) - \ln x = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$

On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{t \to 1} \ln t = 0$.

Donc par composition de limites :

$$\lim_{x \to 0} \left(\ln(\sin x) - \ln x \right) = \boxed{0}$$

1.(e) $x^x = e^{x \cdot \ln x}$

D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x \to 0^+} x \cdot \ln x = 0$

De plus $\lim\limits_{t \to 0} e^t = 1$.

Donc par composition de limites : $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = \boxed{1}$

1.(f) On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x(x+1)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x(x+1)} = -\infty$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(x+1)}$ n'existe pas.

1.(g) $\ln(1+e^x) = \ln\left(e^x \times (e^{-x}+1)\right) = x + \ln(e^{-x}+1)$

donc $\dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = 1 + \dfrac{\ln(e^{-x}+1)}{x}$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(1+e^x)}{x} = 1 + \dfrac{0}{+\infty} = \boxed{1}$

2.(a) $$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{x^2 \times \left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{1+x^2-1} = \sqrt{1+x^2}+1$$

donc $$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \boxed{2}$$

2.(b) $$\frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x} = \frac{4-(x^2+4)}{x(1+x-1)} \times \frac{\sqrt{1+x}+1}{2+\sqrt{x^2+4}}$$

$$= -\frac{\sqrt{1+x}+1}{2+\sqrt{x^2+4}}$$

donc $$\lim_{x \to 0} \frac{2-\sqrt{x^2+4}}{x\sqrt{1+x}-x} = -\frac{2}{4} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

3.(a) $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\cos(e^x)| \leq 1$

donc $$0 \leq \left|\frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\right| = \frac{|x|.|\cos(e^x)|}{x^2+1} \leq \frac{|x|}{x^2+1}$$

Mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{x^2+1} = 0$ donc par encadrement :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x.\cos(e^x)}{x^2+1} = \boxed{0}$$

3.(b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x - \sin x \geq x - 1$

Donc comme exp est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{x-\sin x} \geq e^{x-1}$

Donc par minoration : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x - \sin(x)} = \boxed{+\infty}$

3.(c) $\forall x > 0, \ \lfloor 1/x \rfloor \geq \frac{1}{x} - 1$

et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = +\infty$

donc par minoration : $\lim\limits_{x \to 0^+} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \boxed{+\infty}$