Ex 2 du TD 8

1. (a) $\ln(1+x) - \ln x = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

par substitution dans $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

donc $x.\left(\ln(1+x) - \ln x\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\left(\ln(1+x) - \ln x\right) = \boxed{1}$

1. (b) D'après les croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln(x) = 0$

donc $x^x - 1 = e^{x.\ln x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} x.\ln(x)$

par substitution dans $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$

Par division $\dfrac{x^x - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln x$

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = \boxed{-\infty}$

1.(c) $\lim_{x\to 0^+} (x+x^2) = 0$ ②

donc $\ln(1+x+x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} x+x^2$ par substitution dans $\ln(1+t) \underset{t\to 0}{\sim} t$

Par transitivité $\ln(1+x+x^2) \underset{x\to 0^+}{\sim} x$

et par division $\dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x^2} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$

donc $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x+x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = \boxed{+\infty}$

1.(d) $\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x} = \exp\left(2x.\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)\right) = \exp\left(2x.\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right)\right)$

or $\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$ donc $2x.\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{\sim} 4$

⚠ On ne peut pas composer par exp : on utilise donc les limites qui sont elles compatibles avec la composition

Donc $\lim_{x\to +\infty} 2x.\ln\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 4$

donc $\lim_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x} = \boxed{e^4}$

1.(d) $$\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2$$

donc $$\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right)^x=\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x}=\exp\left(2x\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\right)$$

mais $$\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-2+1}{x-2}=1+\frac{1}{x-2}$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x-2}=0$ on a $\displaystyle\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x-2}$

donc $\displaystyle\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}$

donc $\displaystyle 2x\cdot\ln\left(\frac{x-1}{x-2}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}2$

Par composition de limites : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^{2x}=\boxed{e^2}$

2.(a) $x^2+1\underset{x\to0}{\sim}1$ donc $\sqrt{x^2+1}\underset{x\to0}{\sim}\sqrt{1}=1$

donc $x\cdot\sqrt{x^2+1}\underset{x\to0}{\sim}x$

$x^4+x\underset{x\to0}{\sim}x$ donc $\sqrt{x^4+x}\underset{x\to0}{\sim}\sqrt{x}$

Par quotient : $\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}} \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{x}$

donc $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x.\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^4+x}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \boxed{0}$

<u>2.(b)</u> $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \sqrt{x}.\left(\sqrt{1+\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} - 1\right)$

Comme $\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{=} o(x)$ on a $x+\sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} x$

donc $\sqrt{x+\sqrt{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{x}$

donc $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

on a donc $\displaystyle\lim \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Par substitution dans $\sqrt{1+t} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{2}$:

$$\sqrt{1+\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

réutilisé ici

donc $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$

2.(c) $\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}=\frac{x}{\sqrt{x+1}\times\sqrt{x+2}}\times\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+2}\right)$

$$=\frac{x}{\sqrt{x+1}}\times\left(\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1\right)$$

mais $x+1\underset{x\to+\infty}{\sim}x$ donc $\sqrt{x+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{x}$

et $\sqrt{1+t}-1\underset{t\to0}{\sim}\frac{t}{2}$ donc $\sqrt{\frac{x+1}{x+2}}-1=\sqrt{1-\frac{1}{x+2}}-1$

$$\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{-1}{2(x+2)}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{2x}$$

Finalement par produit et quotient :

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{x}{\sqrt{x}}\times\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{2\sqrt{x}}$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{2\sqrt{x}}=\boxed{0}$

3.(a) On sait que $\sin t \underset{t\to 0}{\sim} t$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi}{x} = 0$ on a par substitution : $\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{x}$

donc $x \times \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} \pi$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x.\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) = \boxed{\pi}$

3.(b) Pour se ramener en 0 on pose $x = \frac{\pi}{3} + h$.

On a $\sin(3x) = \sin(\pi + 3h) = -\sin(3h) \underset{h\to 0}{\sim} -3h$

donc $\sin(3x) \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\sim} -3\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

De même : $1 - 2\cos x = 1 - 2\cos \frac{\pi}{3} + h$

$= 1 - 2.\left(\frac{1}{2}\cos h - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin h\right)$

$= 1 - \cos h + \sqrt{3}.\sin h$

d'après le cours $1 - \cos h \underset{h\to 0}{\sim} \frac{h^2}{2}$ et $\sqrt{3}.\sin h \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}.h$

et on sait que $h^2 \underset{h\to 0}{=} o(h)$

donc $1 - \cos h \underset{h\to 0}{=} o(\sqrt{3}.\sin h)$

donc $1 - \cos h + \sqrt{3}.\sin h \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}.\sin h \underset{h\to 0}{\sim} \sqrt{3}.h$

donc $1 - 2.\cos x \underset{x\to\pi/3}{\sim} \sqrt{3}.\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Par quotient on obtient : $\dfrac{\sin(3x)}{1-2.\cos x} \underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\sim} \dfrac{-3.(x-\pi/3)}{\sqrt{3}.(x-\pi/3)}$

$$\underset{x\to\frac{\pi}{3}}{\sim} -\sqrt{3}$$

donc $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x)}{1-2.\cos x} = \boxed{-\sqrt{3}}$

3.(c) Pour $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ on se ramène en 0 en posant $x=1+h$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}h\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}h\right) \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{\pi}{2}h$$

donc $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \underset{x\to 1}{\sim} -\frac{\pi}{2}(x-1)$

D'autre part :

$$e^{-\frac{\pi}{2}x^2} - e^{-\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \times \left(e^{-\frac{\pi}{2}(x^2-1)} - 1\right)$$

sachant que $e^t - 1 \underset{t\to 0}{\sim} t$ on obtient par substitution :

$$e^{-\frac{\pi}{2}x^2} - e^{-\frac{\pi}{2}} \underset{x\to 1}{\sim} e^{-\frac{\pi}{2}} \times \frac{-\pi}{2}(x^2-1)$$

Comme $x^2-1 = (x-1)\times(x+1)$ on obtient par quotient :

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{e^{-\frac{\pi}{2}x^2} - e^{-\frac{\pi}{2}}} \underset{x \to 1}{\sim} \frac{-\frac{\pi}{2}(x-1)}{e^{-\frac{\pi}{2}} \times \frac{-\pi}{2} \times (x-1) \times (x+1)}$$

$$\underset{x \to 1}{\sim} \frac{e^{\pi/2}}{x+1}$$

donc $$\lim_{x \to 1} \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{e^{-\frac{\pi x^2}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}} = \lim_{x \to 1} \frac{e^{\pi/2}}{x+1} = \boxed{\frac{1}{2} e^{\pi/2}}$$