Ex 9 TD 8

1. $f : x \longmapsto \dfrac{x.\ln x}{x^2-1}$ $\qquad \mathcal{D}f =]0,1[\cup]1,+\infty[$

- Par croissances comparées : $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x = 0$

donc par quotient de limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{0}$

- en 1 :

$\ln x = \ln(1 + x - 1) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ car $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$

$x^2-1 = (x-1)\times(x+1) \underset{x\to 1}{\sim} 2(x-1)$ car $\lim\limits_{x\to 1}(x+1) = 2$

donc $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{x(x-1)}{2(x-1)} \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{x}{2}$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \boxed{\dfrac{1}{2}}$

- en $+\infty$: $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x.\ln x}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$

donc par croissances comparées on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0}$

La droite d'équation $y = 0$ est donc asymptote à $\mathcal{C}f$ en $+\infty$.

Comme $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x}$

On sait que $f(x) \geqslant 0$ au voisinage de $+\infty$

donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de l'asymptote $y = 0$

au voisinage de $+\infty$.

2. $f : x \longmapsto x + \sqrt{\dfrac{x^3 - 1}{x+2}}$

$x \in \mathcal{D}_f \iff x \neq -2$ et $\dfrac{x^3-1}{x+2} \geqslant 0$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
x^3-1	$-$		$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x^3-1}{x+2}$	$+$	$\|\|$	$-$	0	$+$

$\mathcal{D}_f =]-\infty, -2[\cup [1, +\infty[$

- $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 + 0 = \boxed{1}$

- $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -2 + \sqrt{\dfrac{-9}{0^-}} = \boxed{+\infty}$

donc la droite d'équation $x = -2$ est asymptote

à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de -2

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) + (+\infty) = \boxed{+\infty}$

A l'aide d'un DL$(+\infty)$ on cherche une asymptote oblique.

On pose $x = \frac{1}{h}$. Si $x \to +\infty$ alors $h \to 0^+$ donc $h > 0$.

$$f(x) = \frac{1}{h} + \sqrt{\frac{\frac{1}{h^3} - 1}{\frac{1}{h} + 2}} = \frac{1}{h} + \sqrt{\frac{1 - h^3}{h^2(1+2h)}} \underset{h>0}{=} \frac{1}{h}\left(1 + \sqrt{\frac{1-h^3}{1+2h}}\right)$$

or $\sqrt{\frac{1-h^3}{1+2h}} = \sqrt{1 - \frac{h^3+2h}{1+2h}}$

de plus $\frac{1}{1+2h} \underset{h \to 0}{=} 1 - 2h + o(h)$

donc
$$\frac{h^3+2h}{1+2h} \underset{h \to 0}{=} (1-2h)(h^3+2h) + o(h^2)$$
$$\underset{h \to 0}{=} 2h - 4h^2 + o(h^2)$$

Comme $\sqrt{1+t} \underset{t \to 0}{=} 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)$ on a :

$$\sqrt{\frac{1-h^3}{1+2h}} \underset{h \to 0}{=} \sqrt{1 - 2h + 4h^2 + o(h^2)}$$
$$\underset{h \to 0}{=} 1 + (-h + 2h^2) - \frac{1}{8} 4h^2 + o(h^2)$$
$$\underset{h \to 0}{=} 1 - h + \frac{3}{2}h^2 + o(h^2)$$

donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{=} x\left(1 + 1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

donc $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} 2x-1+\underbrace{\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{=o(1)}$

donc la droite d'équation $y=2x-1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

De plus $f(x)-(2x-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{2x}$

donc $f(x)-(2x-1)\geq 0$ pour x au voisinage de $+\infty$.

Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $y=2x-1$ au voisinage de $+\infty$.

- en $-\infty$ on a une forme indéterminée.

On reprend le calcul de DL précédent mais cette fois $h\to 0^-$ donc $h<0$ donc $\sqrt{h^2}=-h$.

$f(x)=\frac{1}{h}\left(1 \underset{\text{⚠}}{-} \sqrt{\frac{1-h^3}{1+2h}}\right)$

donc $f(x)\underset{x\to-\infty}{=} x\left(1-1+\frac{1}{x}-\frac{3}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$

$\underset{x\to-\infty}{=} 1-\underbrace{\frac{3}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)}_{=o(1)}$

donc $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\boxed{1}$.

La droite d'équation $y=1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

$f(x)-1 \underset{x\to-\infty}{\sim} -\frac{3}{2x}$ donc au voisinage de $-\infty$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $y=1$.